Exercice 20 !!

La loi du temps d'attente X de ce client est une variable aléatoire réelle uniforme sur l'intervalle [0,20]

$E(X) = \frac{20+0}{2} = 10$

Exercice 21(6 lampes???)

a) * $f(t) = \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}$

$\forall\ t \in [0, +\infty[$ on a : $f(t) \geq 0$

$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t).dt = \lim_{x \to +\infty} \left[-e^{-\frac{t}{4}}\right]_0^x$

$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 - e^{-\frac{x}{4}}\right) = 1$

Conclusion : f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire positive

** $E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t.f(t).dt$: en intégrant par parties en trouve $E(X) = 4$

Ou bien on remarquera que f est une densité de probabilité d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{4}$.

Donc $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 4 \Rightarrow \boxed{E(X) = 4 \text{ ans}}$

$V(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t^2.f(t).dt - E(X)^2$

$= \frac{1}{\lambda^2} = 16 \Rightarrow \boxed{V(X) = 16}$

b) $p(0 \leq X \leq 6) = \int_0^6 f(t).dt$

$= e^{-\lambda \times 0} - e^{-\lambda \times 6} = 1 - e^{-\frac{3}{2}}$

$\boxed{p(0 \leq X \leq 6) \sqcup 0{,}776}$

Remarque : la probabilité pour que cette appareil fonctionne de façon continue pendant 6 ans est exactement la probabilité qu'une seule lampe fonctionne de façon continue pendant 6ans car les 6 lampes sont tous nécessaires au même temps pour cette appareil

Exercice 22

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

1) $\forall\ x \in [0, +\infty[$ on a : $0 \leq e^{-\frac{1}{2}x} \leq 1$ donc

$0 \leq 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \leq 1$ d'où $\boxed{0 \leq F(X) \leq 1}$ (1)

$\boxed{\lim_{x \to -\infty} F(X) = 0}$ (2)

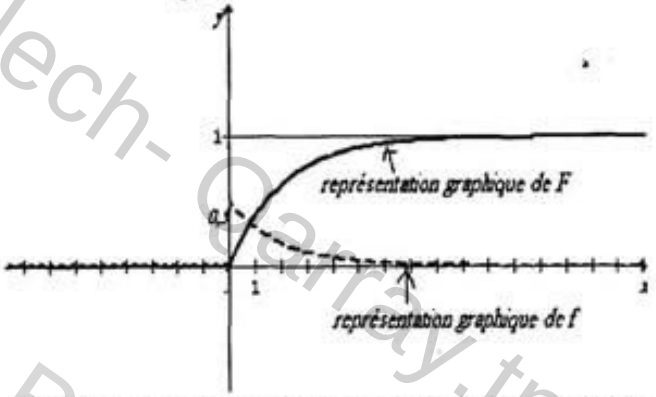
$\lim_{x \to +\infty} F(X) = \lim_{x \to +\infty} (1 - e^{-\frac{1}{2}x}) = 1 \Rightarrow$

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(X) = 1}$ (3)

Les résultats (1), (2) et (3) prouvent que F satisfaite aux propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X

2) La fonction f: dérivée de F est la densité de probabilité de X d'où :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$



4) a) On pourra remarquer que X est une variable Aléatoire continu suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$

Donc $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 2 \Rightarrow \boxed{E(X) = 2}$

$V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 4 \Rightarrow \boxed{V(X) = 4}$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn